

# Über ein optisches Kernmodell für Neutronenreaktionsquerschnitte

Von P. MITTELSTAEDT

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforsch. 12 a, 643—646 [1957]; eingegangen am 5. Juni 1957)

Das optische Modell für Neutronen gestattet die Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes  $\sigma_t$ . Dagegen ist es in dieser Theorie nicht möglich, den Reaktionsquerschnitt  $\sigma_r$  und damit den elastischen Querschnitt  $\sigma_e$  zu bestimmen. Es soll daher eine begrifflich naheliegende Erweiterung des optischen Modells vorgeschlagen werden, die es gestattet, neben  $\sigma_t$  auch  $\sigma_r$  und  $\sigma_e$  in einer dem bisherigen Modell analogen phänomenologischen Weise zu beschreiben. Die Zusammenhänge des ursprünglichen mit dem hier vorgeschlagenen Modell werden auf Grund der physikalischen Interpretation des optischen Modells genauer diskutiert.

## 1. Die ursprüngliche Formulierung des optischen Modells

In der bisherigen Formulierung des optischen Kernmodells für Neutronen<sup>1</sup> wird von der Tatsache ausgegangen, daß die totalen Wirkungsquerschnitte bei Primärenergien zwischen 1 und 30 MeV eine sog. Giant-Resonanzstruktur zeigen. Während die bei kleinen Energien bekannten Einzelresonanzen sich wegen der starken Verbreiterung in diesem Energiebereich sehr stark überlagern, und daher die Resonanzstruktur weitgehend verschwunden ist, zeigen sich Giant-Resonanzen, deren Lage und Breite von einigen MeV außerdem noch vom Atomgewicht des beschossenen Kernels abhängt.

Die experimentellen Daten, die diese Grob-Struktur zeigen, sind im allgemeinen durch die experimentelle Anordnung bewirkte Mittelwerte über einen Energiebereich  $I$ , der groß ist gegen die Abstände der Einzelresonanzen  $D$ , andererseits aber klein gegen die Giant-Resonanzen  $\Delta$ , also:  $D \ll I \ll \Delta$ . Es ist infolgedessen zweckmäßig, zur Untersuchung der Grob-Struktur auch theoretisch gemittelte Querschnitte einzuführen. Ist  $I$  ein Intervall, in dem noch viele Einzelresonanzen vorhanden sind, so werde ein Mittelwertbegriff definiert für eine Funktion  $f(E)$ , die von der Energie  $E$  des einfallenden Teilchens abhängt.

$$\bar{f}(E) = \frac{1}{I} \int_{E-I/2}^{E+I/2} f(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (1)$$

Aus den bekannten Formeln<sup>2</sup> für den elastischen Querschnitt, den Reaktionsquerschnitt und den to-

talen Querschnitt (wir geben nur den Partialquerschnitt für einen  $l$ -Wert an)

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \pi \lambda^2 (2l+1) |1 - \eta|^2, \\ \sigma_r &= \pi \lambda^2 (2l+1) (1 - |\eta|^2), \\ \sigma_t &= \pi \lambda^2 (2l+1) (|1 - \eta|^2 + 1 - |\eta|^2) \end{aligned}$$

erhält man<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_e &= \pi \lambda^2 (2l+1) (|1 - \bar{\eta}|^2 - |\bar{\eta}|^2 + |\bar{\eta}|^2), \\ \bar{\sigma}_r &= \pi \lambda^2 (2l+1) (1 - |\bar{\eta}|^2), \\ \bar{\sigma}_t &= \pi \lambda^2 (2l+1) (|1 - \bar{\eta}|^2 - |\bar{\eta}|^2 + 1); \end{aligned} \quad (2)$$

die  $\eta(E)$  sind die Diagonalelemente der  $S$ -Matrix für verschiedene Energien  $E$ .  $\eta(E)$  ist im allgemeinen eine sehr komplizierte Funktion, die die zahlreichen Resonanzen des Compound-Kerns enthält. Dagegen ist zu erwarten, daß  $\bar{\eta}$  eine verhältnismäßig glatte Funktion ist, die aber doch noch die Schwankungen, die den Giant-Resonanzen entsprechen, enthält.

Physikalisch bedeutet das Auftreten der Giant-Resonanzen, daß beim Eindringen eines Neutrons in den Kern die Einteilchenstruktur dieses Zustandes (Schalenmodell) mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit erhalten bleibt, ohne daß eine Wechselwirkung des eindringenden Neutrons mit anderen Freiheitsgraden des Kerns bemerkbar ist. Sieht man also von den Einzelresonanzen ab, so zeigen die Wirkungsquerschnitte ein Verhalten, das einerseits dem Schalenmodell, andererseits dem Compound-Modell entspricht. Um für dieses Verhalten ein geeignetes Modell zu haben, geht man aus von folgendem komplexem Potential:

<sup>1</sup> H. FESHBACH, C. PORTER u. V. F. WEISSKOPF, Phys. Rev. **90**, 166 [1953]; **96**, 448 [1954]. — F. L. FRIEDMANN u. V. F. WEISSKOPF, „Niels Bohr and the Development of Physics“, Pergamon Press, London 1955. — D. C. PEASLEE, in „Annual Review of Nuclear Science“, Annual Reviews, Stanford 1955, Bd. 5. — F. MEDINA u. G. SÜSSMANN, Fortschritt der Physik **IV**, (7) 297 [1956].

<sup>2</sup> J. M. BLATT u. V. F. WEISSKOPF, Theoretical Nuclear Physics, John Wiley & Sons, New York 1952.

<sup>3</sup> H. FESHBACH, C. PORTER u. V. F. WEISSKOPF, Phys. Rev. **96**, 448 [1954]. — P. MITTELSTAEDT, Z. Naturforsch. **11 a**, 663 [1956].



$$V(r) = V_1(r) + i V_2(r).$$

Die mit einem solchen optischen Potential berechneten Größen  $\eta^{(V)}$  sollen dabei identifiziert werden mit  $\bar{\eta}$ .

$$\eta^{(V)} = \bar{\eta}. \quad (3)$$

Mit Hilfe dieses Modells ist es möglich,  $\sigma_t$  zu berechnen. Bei geeigneter Wahl von  $V(r)$ <sup>1</sup> lassen sich die Experimente sehr befriedigend beschreiben. Dagegen ist es nicht möglich,  $\sigma_e$  und  $\sigma_r$  mit diesem Modell zu bestimmen. Statt dessen werden gewöhnlich<sup>3</sup> der formelastische Querschnitt

$$\bar{\sigma}_{fe} = \pi \lambda^2 (2l + 1) |1 - \bar{\eta}|^2$$

und der Compound-Querschnitt

$$\bar{\sigma}_c = \pi \lambda^2 (2l + 1) (1 - |\bar{\eta}|^2)$$

untersucht.  $\bar{\sigma}_{fe}$  beschreibt dabei denjenigen Teil des elastischen Querschnitts, der durch die Streuung am Einteilchenmodell hervorgerufen wird. Es werden also in diesem Querschnitt alle diejenigen Ereignisse erfaßt, bei denen keinerlei Wechselwirkung mit den übrigen Freiheitsgraden des Compound-Kerns stattgefunden hat.

Der Querschnitt  $\bar{\sigma}_c$  dagegen erfaßt all diejenigen Prozesse, bei denen der Einteilchenzustand infolge seiner Ankopplung an die übrigen Freiheitsgrade des Kernes in einen komplizierten Mehrteilchenzustand übergegangen ist.  $\bar{\sigma}_c$  ist daher ein direktes Maß für die Abweichung des betreffenden Modells vom Einteilchenmodell. Der experimentell bestimmte Reaktionsquerschnitt  $\sigma_r$  unterscheidet sich von  $\bar{\sigma}_c$  durch den sog. compound-elastischen Querschnitt

$$\bar{\sigma}_{ce} = \pi \lambda^2 (2l + 1) (|\bar{\eta}|^2 - |\bar{\eta}|^2),$$

wobei

$$\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_{ce}.$$

Damit sind alle diejenigen Prozesse gemeint, bei denen zwar eine Wechselwirkung mit den Mehrteilchenfreiheitsgraden stattgefunden hat, die aber trotzdem zum elastischen Querschnitt hinzugegerechnet werden müssen. Um diesen Querschnitt  $\bar{\sigma}_{ce}$  unterscheidet sich auch der experimentelle elastische Querschnitt  $\bar{\sigma}_e$  von den oben diskutierten  $\bar{\sigma}_{fe}$ , also  $\bar{\sigma}_e = \bar{\sigma}_{fe} + \bar{\sigma}_{ce}$ , da zu dem elastischen Anteil der Streuung am Einteilchenmodell noch der elastische Beitrag der Mehrteilchenwechselwirkung hinzugenommen werden muß, um den gesamten elastischen Querschnitt zu bekommen. Nur solange als  $\bar{\sigma}_{ce}$  klein ist gegen  $\bar{\sigma}_e$  und  $\sigma_r$ , kann man die experimentellen

Größen  $\bar{\sigma}_e$  und  $\sigma_r$  durch  $\bar{\sigma}_{fe}$  bzw.  $\bar{\sigma}_c$  beschreiben. Vermutlich ist das bei höheren Energien und schweren Kernen der Fall, wenn so viele Zerfallsmöglichkeiten für den Compound-Kern bestehen, daß der relative Anteil der compound-elastischen Streuung vernachlässigt werden darf. Wenn dies nicht der Fall ist, ist eine Berechnung der betreffenden Größe aus dem optischen Modell unmöglich. Formal liegt das daran, daß das optische Modell zwar eine Aussage über  $\bar{\eta}$  macht, womit sich  $\sigma_t$  berechnen läßt, dagegen keine Information über  $|\bar{\eta}|^2$  aus diesem Modell gewonnen werden kann. Zur Berechnung von  $\sigma_r$  und  $\sigma_e$  ist jedoch neben  $\bar{\eta}$  auch noch die Kenntnis von  $|\bar{\eta}|^2$  erforderlich.

## 2. Erweiterung des Modells für Reaktionsquerschnitte

Die Annahme, daß  $\bar{\eta} = \eta^{(V)}$  ist, war begründet durch das empirische Phänomen der Giant-Resonanzen bei  $\sigma_t$ . Da  $\sigma_t$  nur von  $\bar{\eta}$  abhängt, erschien es zweckmäßig,  $\bar{\eta} = \eta^{(V)}$  zu setzen. Andererseits ist es so, daß auch die empirischen Reaktionsquerschnitte eine Giant-Resonanzstruktur zeigen<sup>4</sup>. Da zur Berechnung von

$$\bar{\sigma}_r = \pi \lambda^2 (2l + 1) (1 - |\bar{\eta}|^2)$$

lediglich  $|\bar{\eta}|^2$  nötig ist, hätte man auch

$$|\bar{\eta}|^2 = |\eta^{(V)}|^2 \quad (4)$$

setzen können. Damit lassen sich dann die Reaktionsquerschnitte  $\sigma_r$  berechnen, dagegen nicht  $\sigma_t$  und  $\sigma_e$ . Es ist also in gewisser Hinsicht konventionell, ob man  $\bar{\eta}$  oder  $|\bar{\eta}|^2$  durch ein optisches Modell beschreibt. Da jedoch keine der beiden Annahmen ausreicht, um alle Querschnitte zu beschreiben, scheint es dem Problem angemessen zu sein, von vornherein zwei optische Potentiale

$$V = V_1 + i V_2, \quad W = W_1 + i W_2$$

zu verwenden, und die aus  $V$  bzw.  $W$  berechneten Größen  $\eta^V$  und  $\eta^W$  durch

$$\eta^V = \bar{\eta} \quad |\bar{\eta}|^2 = |\eta^W|^2 \quad (5)$$

mit den Querschnitten zu verbinden.

Mit dieser Festsetzung können die Potentiale  $V$  und  $W$  nun so adjustiert werden, daß die damit berechneten Querschnitte  $\sigma_t$  und  $\sigma_r$  möglichst gut

<sup>4</sup> M. WALD u. H. H. BARSCHALL, Phys. Rev. **93**, 1062 [1954].  
P. C. HUGHES u. J. A. HARVEY, Neutron Cross Section, New York 1955.

mit den entsprechenden experimentellen Querschnitten übereinstimmen.

Um die physikalische Bedeutung dieses zweiten optischen Potentials zu untersuchen, betrachten wir die beiden Querschnitte

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_c &= \pi \lambda^2 (2l+1) (1 - |\eta^V|^2), \\ \overline{\sigma}_r &= \pi \lambda^2 (2l+1) (1 - |\eta^W|^2).\end{aligned}\quad (6)$$

$\overline{\sigma}_c$  war im bisherigen Modell erklärt als der Querschnitt, der alle diejenigen Prozesse erfaßt, bei denen eine Wechselwirkung mit den Freiheitsgraden des Compound-Kerns stattgefunden hat. Wegen der formalen Analogie der angegebenen Ausdrücke für  $\overline{\sigma}_r$  und  $\overline{\sigma}_c$  kann man  $\overline{\sigma}_r$  als den „Compound-Querschnitt“  $\sigma_c^{(W)}$  interpretieren, der nicht mit  $V$ , sondern mit dem Potential  $W$  als optischem Modell berechnet worden ist. Beachtet man andererseits, daß  $\overline{\sigma}_r$  inhaltlich gesehen diejenigen Prozesse des Compound-Querschnitts  $\overline{\sigma}_c$  erfaßt, die nicht zu den elastischen Ereignissen hinzugerechnet werden dürften, so folgt, daß  $W = W_1 + iW_2$  ein optisches Potential beschreibt, bei dem alle Zerfallskanäle des Compound-Kerns die gleichen sind, wie bei  $V$ , – mit dem Unterschied, daß der compound-elastische Zerfall nicht vorkommt. Man kann also  $\overline{\sigma}_r$  deuten als den „Compound-Querschnitt“ eines optischen Modells, bei dem keine compound-elastischen Zerfallsmöglichkeiten existieren.

Mit dem Potential  $W = W_1 + iW_2$  kann man in Analogie zu

$$\overline{\sigma}_{fe}^{(V)} = \pi \lambda^2 (2l+1) |1 - \eta^V|^2$$

formal auch den Ausdruck

$$\overline{\sigma}_{fe}^{(W)} = \pi \lambda^2 (2l+1) |1 - \eta^W|^2$$

bilden. Da  $W$  nach der oben gegebenen Interpretation einem optischen Modell entspricht, bei dem keine compound-elastischen Zerfallsmöglichkeiten bestehen, so bedeutet  $\overline{\sigma}_{fe}^{(W)}$  den diesem Modell entsprechenden formelastischen Anteil. Während  $\overline{\sigma}_{fe}^{(V)}$  zwar experimentell nicht meßbar ist, dafür aber eine begrifflich sehr wichtige Größe darstellt, ist  $\overline{\sigma}_{fe}^{(W)}$  weder meßbar noch von besonderem theoretischen Interesse. Diese Tatsache wird verständlich, wenn man beachtet, daß das Potential  $W$  bzw.  $\eta^{(W)}$  durch die Beziehung

$$|\overline{\eta}|^2 = |\eta^W|^2$$

mit den beobachtbaren Größen verbunden ist, wodurch also eine physikalisch konkrete Bedeutung nur  $|\eta^W|^2$  zukommt, nicht aber  $\eta^W$ .

### 3. Die Beziehungen zwischen $V$ und $W$

Um zu einem besseren Verständnis des hier neu eingeführten Potentials  $W$  zu kommen, ist es nützlich die Beziehungen zwischen  $W$  und  $V$  genauer zu untersuchen. Damit ist nicht gemeint, daß nach allgemein einschränkenden Bedingungen für das Potential  $W$  gesucht werden soll. Solche Bedingungen, die sich möglicherweise aus der Kausalitätsforderung herleiten lassen<sup>5</sup>, sollen hier nicht berücksichtigt werden. Vielmehr soll versucht werden, ohne genauere Rechnung, die nur mit sehr großem Aufwand durchzuführen ist, aus den Experimenten einige qualitative Aussagen über  $W$  zu gewinnen. Dieses so eingeschränkte Potential  $W$  soll dann mit  $V$  verglichen werden.

Zunächst sei bemerkt, daß mit dem Potential  $W$  nicht eine völlig beliebige komplexe Funktion des Ortes, der Energie  $E$  und des Atomgewichts  $A$  gemeint ist, die dann nur den experimentellen Daten von  $\overline{\sigma}_r(E, A)$  optimal angepaßt werden braucht. Vielmehr soll unter  $W(r, E, A)$  eine Funktion verstanden werden, die ein „optisches Potential“ darstellt, welche Bedingungen wir hier durch die folgenden zwei Forderungen präzisieren wollen:

$$W(r, E, A) = f(r, A) [W_1(E) + iW_2(E)], \quad (I)$$

wobei  $f(r, A)$  eine weitgehend bekannte reelle Funktion ist.

$$W_1(E) \quad \text{und} \quad W_2(E) \quad (II)$$

seien Funktionen, die in einem Energiebereich  $\Delta E$  monoton von der Energie  $E$  abhängen, der groß ist gegen die Breite  $\Delta$  der Giant-Resonanzen.

Der durch diese beiden Bedingungen ausgedrückte Sachverhalt entspricht genau der oben gegebenen Deutung des optischen Modells  $V$ , wonach das empirische Phänomen der Giant-Resonanzen von  $\overline{\sigma}_t$  durch die Wirkung eines reellen Einteilchenpotentials erklärt wird, dessen geometrische Struktur [hier  $f(r, A)$ ] weitgehend durch die Verteilung der Nukleonen gegeben ist. Die Existenz eines Absorptionsquerschnitts  $\sigma_c$  wird dagegen durch den Imaginärteil des Potentials erklärt. Die Energieabhängigkeit des Potentials selbst ist erst für einen genaueren Vergleich der Theorie mit dem Experiment von Bedeutung, und kann bei einer qualitativen Diskussion der Querschnitte zunächst vernachlässigt

<sup>5</sup> N. G. v. KAMPEN, Phys. Rev. **89**, 1072 [1953]; **91**, 1267 [1953].

werden. Ähnlich wie bei dem Potential  $V$  liegen nun auch die Verhältnisse für  $W$ . Sowohl in bezug auf  $A$  als auch auf  $E$  zeigen die Reaktionsquerschnitte  $\sigma_r$  Giant-Resonanzen, die allerdings bei höheren Energien wegen der sehr starken Absorption nicht bemerkbar sind. Das läßt darauf schließen, daß  $f(r, A)$  von einer ähnlichen Form ist wie bei  $V$ , — wir wollen als einfachste Näherung in beiden Fällen das gleiche  $f$  verwenden — und daß ein reelles Potential  $W_1 \neq 0$  existieren muß. Wegen der beobachteten Reaktionsquerschnitte  $\sigma_r \neq 0$  folgt, daß auch ein imaginäres Potential  $W_2(E) \neq 0$  vorhanden sein muß. Wir wollen daher die folgenden Diskussionen an dem Potential

$$W(r, E, A) = f(r, A) [W_1(E) + i W_2(E)]$$

durchführen, das noch den oben angegebenen Bedingungen (I) und (II) genügen möge.

Zunächst läßt sich aus der Tatsache, daß stets

$$|\eta^V|^2 \geq |\eta^V|^2$$

ist, schließen, daß

$$|\eta^W| \geq |\eta^V| \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_c \geq \bar{\sigma}_r$$

ist. Dies bedeutet, daß der Compound-Querschnitt  $\bar{\sigma}_c$  immer (um den compound-elastischen Querschnitt) größer sein muß als der Reaktionsquerschnitt. Nehmen wir weiter an (diese Voraussetzung wird unten genauer diskutiert), daß  $V_1(E) = W_1(E)$  ist, so läßt sich aus

$$\bar{\sigma}_c^V \geq \bar{\sigma}_c^W$$

schließen, daß

$$V_2(E) \geq W_2(E)$$

ist. Denn wie genaue Rechnungen zeigen<sup>3</sup>, ist  $\bar{\sigma}_c^V$  als Funktion von  $V_2$  betrachtet innerhalb des physikalisch interessanten Bereiches von  $V_2$  eine monoton ansteigende Funktion. Da die Differenzen zwischen  $\bar{\sigma}_c^V$  und  $\bar{\sigma}_c^W$  jedoch immer nur klein sind (der compound-elastische Querschnitt ist im allgemeinen sehr klein gegen  $\bar{\sigma}_c^V$ ), dürfte auch  $W_2$  noch in dem Bereich liegen, in dem  $\bar{\sigma}_c$  eine monoton ansteigende Funktion des Imaginärpotentials ist.

Mit zunehmender Energie nimmt jedoch die Anzahl der Zerfallsmöglichkeiten des Compound-Kerns ständig zu (bei festgehaltenem  $A$ ), und entsprechend wird der relative Anteil der compound-elastischen Kanäle immer kleiner. Daher ist bei hohen Energien in einer sehr guten Näherung  $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_r$ , das heißt aber, daß dort auch  $V_2(E) = W_2(E)$  gilt. Beachtet man noch die bekannte Energieabhängigkeit von

$V_2(E)$ , so wird man für die Funktion  $W_2(E)$  qualitativ einen Verlauf erwarten dürfen, wie er [zusammen mit dem von  $V_2(E)$ ] in Abb. 1 dargestellt ist.

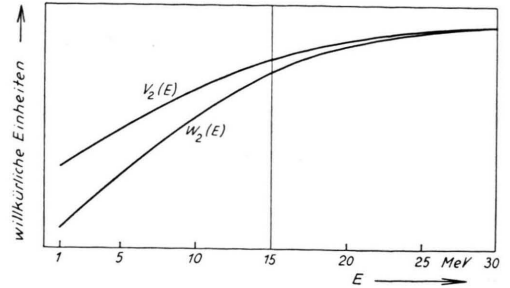


Abb. 1. Die Funktionen  $V_2(E)$  und  $W_2(E)$  [qualitativ].

Es muß noch die Frage untersucht werden, inwiefern es sinnvoll ist, die oben angenommene Voraussetzung zu machen, daß die Realteile  $V_1$  und  $W_1$  angenähert gleich sind. Wir hatten gesehen, daß für die Giant-Resonanzen in  $A$  und  $E$  wesentlich die Geometrie des Potentials, also  $f(r, A)$  und der Realteil  $V_1$  bzw.  $W_1$  von Bedeutung ist. Wesentlich von der Größe des Realteils hängt insbesondere die Wellenlänge des einfallenden Neutrons im Kern ab, und somit die Lage der Giant-Resonanzen. Das Imaginärpotential dagegen macht sich hauptsächlich in der Höhe und Breite der entsprechenden Resonanzen bemerkbar. Soweit aus den Experimenten zu ersehen ist, fallen die Giant-Resonanzen von  $\bar{\sigma}_t(E, A)$  und  $\bar{\sigma}_r(E, A)$  der Lage nach weitgehend zusammen, so daß die Annahme gleicher Realpotentiale  $V_1$  und  $W_1$  berechtigt erscheint. Allerdings muß bemerkt werden, daß die experimentellen Daten insbesondere für  $\bar{\sigma}_r(E, A)$  zum Teil noch so unvollständig sind, daß sich bei einer Erweiterung der experimentellen Kenntnis die oben gemachte Annahme, daß die Giant-Resonanzen weitgehend zusammenfallen, möglicherweise als falsch erweisen kann. Aber auch bei völliger experimenteller Übereinstimmung der Giant-Resonanzen wird man nur näherungsweise auf die Beziehung  $W_1 = V_1$  schließen können, da die Lage einer Giant-Resonanz zwar sehr wesentlich, aber nicht ausschließlich vom Realteil des Potentials abhängt. Allerdings wird die Abhängigkeit der Lage der Giant-Resonanzen vom Imaginärpotential im allgemeinen vernachlässigbar klein sein, so daß die Gleichung  $W_1 = V_1$  im Rahmen der Genauigkeit des optischen Modells eine sehr gute Näherung darstellt.

Herrn Prof. W. HEISENBERG und Herrn Dr. W. BRENIG danke ich für wertvolle Diskussionen.